

УДК 539.3

А. Сяський, докт. техн. наук; Н. Шинкарчук

Рівненський державний гуманітарний університет

МІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ І ЖОРСТКОГО ДИСКА

Резюме. Побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення контактних зусиль на лінії розмежування матеріалів нескінченної пластинки з криволінійним отвором і абсолютно жорсткого диска за наявності між ними зон спаю, гладкого контакту і відставання. Пластинчаста конструкція перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності. Наближений розв'язок задачі будується методом механічних квадратур і колокації.

Ключові слова: нескінченна пластинка, напружений стан, контактні зусилля, жорсткий диск, сингулярні рівняння.

A. Syasky, N. Shynkarchuk

MIXED CONTACT PROBLEM FOR AN ISOTROPIC PLATE WITH CURVILINEAR HOLE AND HARD DISK

The summary. The built system of singular integral equations with logarithmic kernels to determine contact forces on the lines separation materials infinite plate with curvilinear hole and absolutely hard disk if between them there are zone's materials of solder, smooth contact and lagging. Construction of plate is located in conditions a homogeneous generalized flat state of stress at infinity. Approximate solution of the problem is built by the method of mechanical quadrature and collocation.

Key words: an infinite plate, a stress state, a contact force, hard disk, singular equations.

Функціональна здатність кусково-однорідних пластин, як деталей машин і елементів конструкцій, значною мірою залежить від наявності на лінії розмежування матеріалів математичних розрізів або тріщин, які суттєво знижують допустиме зовнішнє навантаження та експлуатаційний ресурс конструкцій у цілому.

Дослідження часткового або повного контакту берегів тріщини в таких пластинках має важливе самостійне значення з точки зору забезпечення герметичності й непроникувості конструкції.

Контактні задачі для однорідних і кусково-однорідних пластин з розрізами по дузі кола, які перебувають в умовах узагальненого плоского напруженого стану або циліндричного згину, зведенням до задачі лінійного спряження [1] розглянуто в роботах [2–4] та [5,6] відповідно.

Розв'язок задачі про передавання силового навантаження від абсолютно жорсткого диска до контуру криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки при їх неповному ідеальному механічному контакті наведено в [7,8].

У даній статті запропоновано розв'язок мішаної задачі для кусково-однорідної пластинки, яка перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності, за наявності на лінії розмежування матеріалів зон спаю, гладкого контакту і відставання.

Постановка задачі. Нехай нескінченна ізотропна пластинка товщиною $2h$ послаблена симетричним криволінійним отвором, контур якого Γ має форму правильного N - кутника із закругленими кутами. Її середня площина віднесена до системи прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат з полюсом у центрі отвору, а

полярна вісь співпадає з віссю Ox . В отвір пластинки без зазору і натягу вставлено абсолютно жорсткий диск, спаяний з нею на ділянці $\Gamma_3 = [\pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*]$.

Розглянута конструкція перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності, викликаного рівномірно розподіленими зусиллями p і q , які діють в напрямках координатних осей. Внаслідок цього на ділянці $\Gamma_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$ пластинка вступає в контактну взаємодію з диском. На ділянках $\Gamma_2 = [\beta_0^*, \pi + \alpha_1^*] \cup [\pi + \beta_1^*, 2\pi + \alpha_0^*]$ контакт між пластинкою і диском відсутній (рис. 1). Тут $\alpha_0^*, \beta_0^*, \pi + \alpha_1^*, \pi + \beta_1^*$ – полярні кути межових точок ділянок контакту та спаю. Не порушуючи загальності, вважаємо, що при заданих навантаженні на пластинку і зоні спаю виникає тільки одна ділянка контакту.

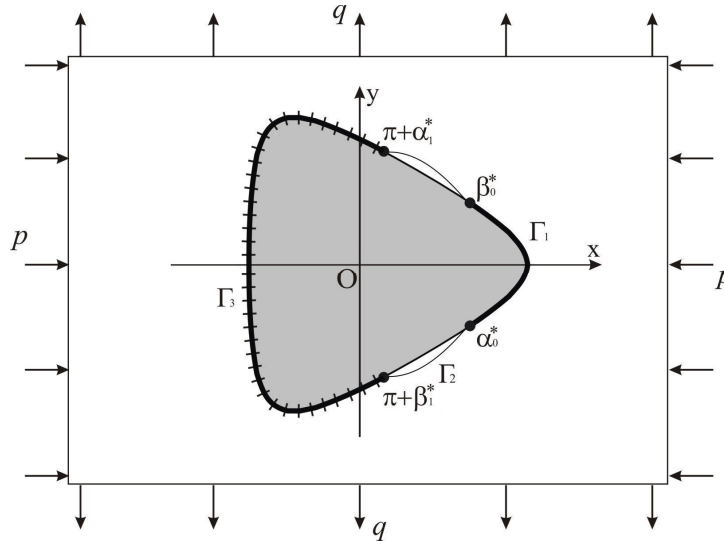


Рисунок 1. Розрахункова схема пластинки

Розв'язок задачі передбачає визначення компонентів напружено-деформованого стану на контурі отвору пластинки, величини і положення зон контакту та відставання.

Вивід інтегральних рівнянь. Компоненти вектора зміщення (u, v) контурних точок пластинки та жорсткого диска (u^0, v^0) при заданому навантаженні визначаються за формулами [9]

$$\begin{aligned}
 2Ehu &= (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \\
 &\quad - (3p+q) \cos \lambda - (q-p) \varepsilon \cos((N-1)\lambda) + c_1; \\
 2Ehv &= (1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \\
 &\quad - (3q+p) \sin \lambda + (q-p) \varepsilon \sin((N-1)\lambda) + c_2; \\
 (u^0 + iv^0) &= U_0 + iV_0, \quad \lambda \in \gamma,
 \end{aligned} \tag{1}$$

де E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки;

$$f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt; \quad T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda};$$

$T_\rho, S_{\rho\lambda}$ – нормальні та дотичні зусилля на контурі Γ ; c_1, c_2 – довільні сталі; U_0, V_0 – компоненти жорсткого зміщення диска;

$$z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right) - \quad (2)$$

функція [1], яка здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола $\gamma(\rho_0=1)$ у площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка в площині $z = x + iy$; R – характерний розмір отвору (не обмежуючи загальності, вважаємо $R=1$); ε – параметр, який характеризує відхилення форми криволінійного багатокутника від кола; (ρ, λ) – полярна система координат у площині ξ ; $i = \sqrt{-1}$; $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ – образи кутів $\alpha_0^*, \beta_0^*, \alpha_1^*, \beta_1^*$ при відображенні (2).

Граничні умови задачі в зоні гладкого без тертя контакту мають вигляд [9,10]

$$a(\lambda)u + b(\lambda)v = a(\lambda)U_0 + b(\lambda)V_0; \quad S_{\rho\lambda} = 0, \lambda \in \gamma_1, \quad (3)$$

а в зоні спаю їх запишемо так [1,8]:

$$u = U_0; \quad v = V_0, \quad \lambda \in \gamma_3. \quad (4)$$

Тут $\gamma_1 = [\alpha_0, \beta_0]$, $\gamma_3 = [\pi + \alpha_1, \pi + \beta_1]$;

$$a(\lambda) + ib(\lambda) = (\alpha + i\beta)e^{i\lambda}; \quad \alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad \alpha = 1 - \varepsilon(N-1)\cos N\lambda; \quad \beta = \varepsilon(N-1)\sin N\lambda.$$

Унаслідок підстановки (1) в граничні умови (3), (4) отримаємо систему чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій f_1', f_2' на ділянці контакту і в зоні спаю

$$\begin{aligned} a(\lambda) \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - (3p+q) \cos \lambda - (q-p)\varepsilon \cos((N-1)\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt \right] + b(\lambda) \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - (3q+p) \sin \lambda + (q-p)\varepsilon \sin((N-1)\lambda) \right] = a(\lambda)\tilde{c}_1 + b(\lambda)\tilde{c}_2, \\ f_1'(\lambda)a(\lambda) + f_2'(\lambda)b(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt + (1-\nu) \int_{\pi+\alpha_1}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt \right] = \tilde{c}_1 + (3p+q) \cos \lambda + (q-p)\varepsilon \cos((N-1)\lambda); \\ \left[(1-\nu) \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt + (1-\nu) \int_{\pi+\alpha_1}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt \right] = \tilde{c}_2 + (3q+p) \sin \lambda - (q-p)\varepsilon \sin((N-1)\lambda), \quad \lambda \in \gamma_3, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\tilde{c}_1 = 2EhU_0 - c_1$, $\tilde{c}_2 = 2EhV_0 - c_2$.

Умови силової рівноваги диска [9]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) dt + \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_2'(t) dt = 0; \quad \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_1'(t) dt + \int_{\pi+\alpha_1}^{\pi+\beta_1} f_1'(t) dt = 0 \quad (7)$$

служать для визначення сталих \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 із (6).

Контактні зусилля на контурі отвору пластинки з функціями f_1', f_2' пов'язані

співвідношенням [10]

$$T_{\rho} + iS_{\rho\lambda} = \frac{(f_2'(\lambda) - if_1'(\lambda))(a(\lambda) - ib(\lambda))}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \lambda \in \gamma. \quad (8)$$

Для визначення кільцевих зусиль T_{λ} на контурі Γ використовується формула [7]

$$T_{\lambda} = \nu T_{\rho} + \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1 - \nu)(\alpha^2 + \beta^2)T_{\rho}(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \left[R(\lambda, t) - Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right] T_{\rho}(t) dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \left[Q(\lambda, t) + R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda - t}{2} \right] S_{\rho\lambda}(t) dt + \alpha \tilde{\varepsilon}_{\lambda}^0 + \beta \tilde{V}^0 \right\}, \quad \lambda \in \gamma. \quad (9)$$

Тут введено позначення

$$R(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad Q(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t); \quad (10) \\ \tilde{\varepsilon}_{\lambda}^0 + i\tilde{V}^0 = (q - p) \left[1 + \varepsilon(N - 1)e^{-iN\lambda} \right] + 2(p + q)e^{-2i\lambda}.$$

Точний розв'язок системи (5)-(7) знайти неможливо. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру величин $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$ на кінцях зон спаю і контакту. В роботах [7,10] показано, що зусилля T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$ обмежені в зоні контакту, а на її кінцях дорівнюють нулю. На кінцях зони спаю ці зусилля мають кореневу особливість, на яку накладається локальна осциляція [1], причому в задачах визначення концентрації зусиль впливом осциляції можна знехтувати. З огляду на це розв'язок системи (5)-(7) на ділянці спаю можна вибирати в класі функцій, які мають кореневу особливість на кінцях ділянки спаю, а на ділянці контакту – в класі функцій, обмежених на її кінцях.

На підставі [7-10] числову реалізацію задачі можна провести методом механічних квадратур і колокації. При цьому межі граничної зони контакту визначаються методом дихотомії з умов $T_{\rho}(\alpha_0) = T_{\rho}(\beta_0) = 0$.

Результати числового розрахунку. Для пластинки з трикутним ($N=3$, $\varepsilon=\pm 0.2$) отвором досліджено вплив на розподіл зусиль по контуру Γ величини і положення зони спаю та виду зовнішнього навантаження. Результати розрахунку контактних і кільцевих зусиль на контурі отвору проілюстровано на рис. 2-7. Штрихові лінії побудовано для випадку $\alpha_1 = -2\pi/3$, $\beta_1 = 2\pi/3$, суцільні – $\alpha_1 = -\pi/2$, $\beta_1 = \pi/2$, штрихпунктирні – $\alpha_1 = -\pi/4$, $\beta_1 = \pi/4$. Граничні розміри зони контакту для кожного з розглянутих випадків наведено в таблиці 1.

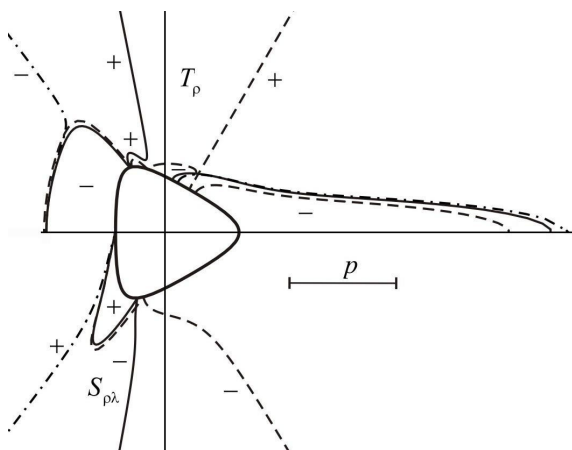


Рисунок 2. Епюри розподілу зусиль T_ρ/p , $S_{\rho\lambda}/p$ на контурі отвору при $\varepsilon = 0.2$

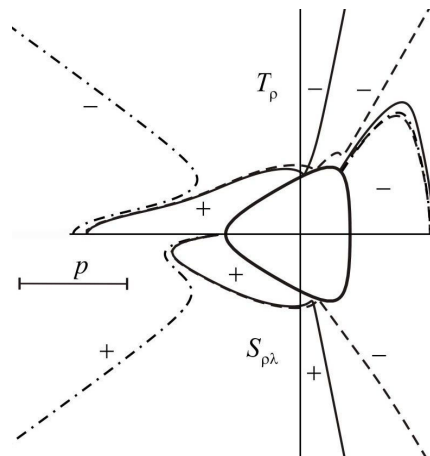


Рисунок 3. Епюри розподілу зусиль T_ρ/p , $S_{\rho\lambda}/p$ на контурі отвору при $\varepsilon = -0.2$

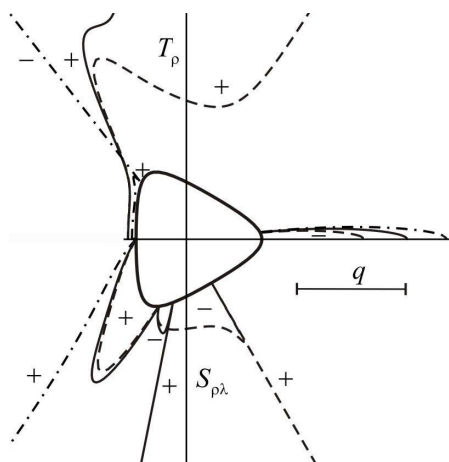


Рисунок 4. Епюри розподілу зусиль T_ρ/q , $S_{\rho\lambda}/q$ на контурі отвору при $\varepsilon = 0.2$

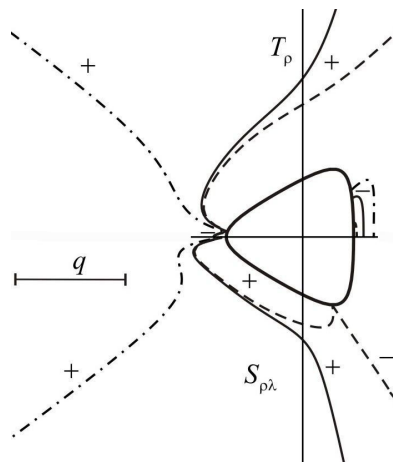


Рисунок 5. Епюри розподілу зусиль T_ρ/q , $S_{\rho\lambda}/q$ на контурі отвору при $\varepsilon = -0.2$

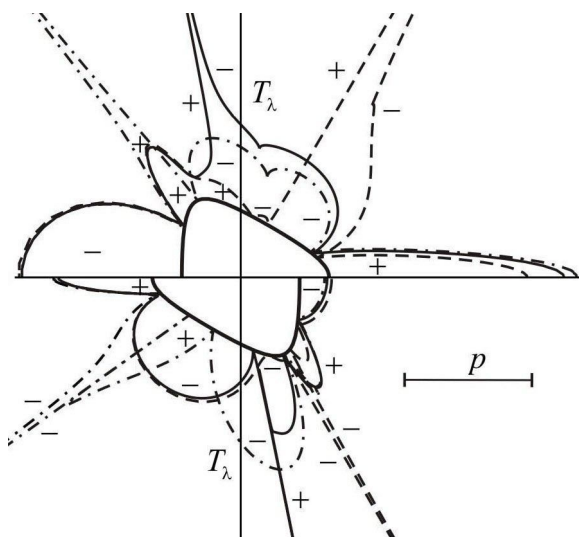


Рисунок 6. Епюри розподілу зусиль T_λ/p на контурі отвору при $\varepsilon = \pm 0.2$

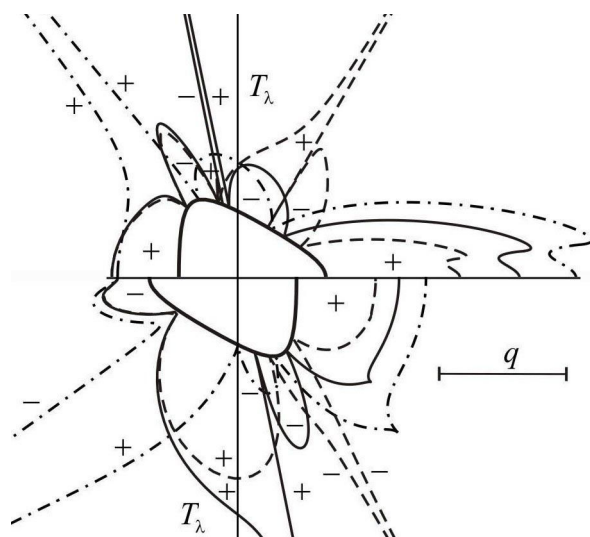


Рисунок 7. Епюри розподілу зусиль T_λ/q на контурі отвору при $\varepsilon = \pm 0.2$

Таблиця 1. Граничні розміри зони контакту

$\beta_1 = -\alpha_1$ (град)	$\beta_0^* = -\alpha_0^*$ (град)			
	$p = 1; q = 0$		$p = 0; q = 1$	
	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = -0.2$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = -0.2$
120	52.72	57.07	5.01	15.50
90	81.73	57.94	5.36	38.08
45	75.40	56.23	5.55	44.05

Висновки. Максимальні нормальні зусилля в зоні контакту виникають у точках контуру з найбільшою кривиною, причому ці зусилля зменшуються зі збільшенням зони спаю. На кінцях зони спаю нормальні, дотичні і кільцеві зусилля необмежені, за межами цієї зони необмежені тільки кільцеві зусилля. При $\varepsilon = 0$ знаходимо розв'язок задачі для пластинки з круговим отвором і жорсткого диска за наявності на лінії розмежування матеріалів математичного розрізу за умови контактування його берегів [2]. Запропонований метод може бути використаний за наявності двох зон контакту.

Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
2. Гриліцький Д.В. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов / Д.В. Гриліцький, Р.М. Луцишин. – Львів: Вид-во “Вища школа” при ЛДУ, 1975. – 111 с.
3. Гриліцький Д.В. Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаиною круглою ізотропною шайбою з розрізами на лінії спаю / Д.В. Гриліцький // Питання механіки і математики. ЛДУ. – 1962. – Вип. 9. – С. 79–86.
4. Гриліцький Д.В. Про деякі випадки пружної рівноваги ізотропної пластинки з впаиною круглою ізотропною шайбою / Д.В. Гриліцький // Доп. АН УРСР. – 1960. – № 2. – С. 164–167.
5. Божидарнік В. Двосторонній згин пластинки з двома симетричними наскрізними тріщинами по дузі кола з урахуванням контакту їх берегів / В. Божидарнік, В. Опанасович, П. Герасимчук // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2007. – Т.12, №2. – С. 20–30.
6. Сулим Г.Т. Двосторонній згин пластинки з круговим отвором і шайбою з урахуванням контакту берегів шайби / Г.Т. Сулим, В.К. Опанасович, П.В. Герасимчук // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник (за напрямом „Інженерна механіка”). – Луцьк: Луцький державний технічний університет, 2007. – Вип. 20 (2). – С. 200–204.
7. Сяський В.А. Мішана контактна задача для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / В.А. Сяський, А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – 1998. – Вип. 5. – С. 139–146.
8. Сяський А.О. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А.О. Сяський, Н.В. Шинкарчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 7 (16). – Рівне: РДГУ, 2010. – С. 199–209.
9. Сяський А. Контакт двозв'язного штампа з кутовими точками і криволінійного отвору нескінченної пластинки / Андрій Сяський, Володимир Сяський // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. – Львів, 2000. – Т.2. – С. 122–125.
10. Комбель С. Посадка жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки / С. Комбель // Машинознавство. – 2003. – № 8. – С. 25–31.

Отримано 25.01.2011р.